Série 13 (Corrigé)

Mots-clés : *Produit scalaire, matrices symétriques*

Remarques :

1. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
2. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Soit V une espace euclidien. On note $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in V$ et la norme associée est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$. Par exemple, considérez que $V = \mathbb{R}^n$ et on utilise le produit scalaire habituel $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^\top \vec{v}$.

Montrer :

a) Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une famille orthonormale, alors $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{2}$.

b) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

Sol.:

a) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \langle (\vec{u} - \vec{v}), (\vec{u} - \vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 = 1 - 0 + 1 = 2$, donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{2}$.

b) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \langle (\vec{u} + \vec{v}), (\vec{u} + \vec{v}) \rangle - \langle (\vec{u} - \vec{v}), (\vec{u} - \vec{v}) \rangle =$
$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \langle (\vec{u} + \vec{v}), (\vec{u} + \vec{v}) \rangle + \langle (\vec{u} - \vec{v}), (\vec{u} - \vec{v}) \rangle =$
$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 2\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$.
Remarque : l'égalité c) s'appelle "identité du parallélogramme".

Exercice 2

Soit A une matrice $n \times n$ inversible. Montrer que la formule $(\vec{u} | \vec{v}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = \vec{u}^T A^T A \vec{v}$ définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Sol.: On doit vérifier les quatre axiomes :

1. *symétrie :* $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$. On a $(\vec{u} | \vec{v}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = (A\vec{v}) \cdot (A\vec{u}) = (\vec{v} | \vec{u})$.
2. *linéarité :* $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. On a $(\vec{u} + \vec{v} | \vec{w}) = (A(\vec{u} + \vec{v})) \cdot (A\vec{w}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{w}) + (A\vec{v}) \cdot (A\vec{w}) = (\vec{u} | \vec{w}) + (\vec{v} | \vec{w})$.

3. *linéarité :* $\langle \alpha \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. On a $(\alpha \vec{u} | \vec{v}) = (A\alpha \vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = \alpha (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = \alpha (\vec{u} | \vec{v})$.
4. *définie positivité :* $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ et $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ ssi $\vec{u} = \vec{0}$. On a $(\vec{u} | \vec{u}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{u}) = \|A\vec{u}\|^2 \geqslant 0$ où $\|\cdot\|$ correspond à la norme euclidienne. Comme A est inversible, on obtient le résultat.

Exercice 3

Soit $V = C[-1,1] = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R}; f \text{ continue}\}$. On munit V du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt.$$

Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel de V suivant :

$$\mathbb{P}_2 = \text{span}\left\{1, t, t^2\right\}.$$

Sol.: On considère la base canonique $p_1 = 1, p_2 = t, p_3 = t^2$ de $\mathbb{P}_2$. La méthode de Gram-Schmidt permet d'orthonormaliser cette base pour obtenir la base q_1, q_2, q_3 cherchée.

On peut déjà poser $q_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$, en utilisant la norme $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$. Pour calculer q_2 on calcule produit scalaire $(p_2|q_1) = \int_{-1}^{1} t \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$. Comme p_2 est déjà orthogonal à q_1, il suffit de le normaliser. On a donc $q_2 = \frac{p_2}{\|p_2\|} = \boxed{\dfrac{t}{\sqrt{2/3}}}$. Enfin, il reste à déterminer q_3. On a les produits scalaires $(p_3|q_1) = \int_{-1}^{1} t^2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $(p_3|q_2) = \int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{\frac{3}{2}} t = 0$. Soit $W_2 = \text{span}\{q_1, q_2\}$. On calcule

$$proj_{W_2} p_3 = \frac{(p_3|q_1)}{(q_1|q_1)} q_1 + \frac{(p_3|q_2)}{(q_2|q_2)} q_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

On a donc $\tilde{q}_3 = p_3 - proj_{W_2} p_3 = t^2 - \frac{1}{3}$. Ainsi, $q_3 = \frac{\tilde{q}_3}{\|\tilde{q}_3\|} = \boxed{\sqrt{\dfrac{45}{8}} \left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right)}$.

(Remarque : On pourrait continuer ainsi et obtenir pour tout n une base de $\mathbb{P}_n$ orthogonale pour ce produit scalaire. Avec une normalisation différente, ces polynômes s'appelle alors les polynômes de Legendre.)

Exercice 4

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2.$$

Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez $\|\vec{v}_1\|$ et $\|\vec{v}_2\|$, ainsi que $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$

Sol.: On obtient $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{24}$ et $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{120}$, et $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$

Exercice 5

Chercher une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Sol.:

i) **Méthode 1.** On calcule : $A^TA = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A^TA sont $18, 0$, avec pour vecteurs propres normalisés associés $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (on ordonne les valeurs singulières dans l'ordre décroissant), et on obtient ainsi la matrice orthogonale V :

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice U s'obtient en normalisant les vecteurs Av_i avec v_i associé à une valeur singulière non nulle, ici il y en a un seul : $Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$u_1 := \frac{1}{\|Av_1\|} Av_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les autres colonnes de U s'obtiennent en étendant la famille $\{u_1\}$ à une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Il faut donc trouver deux vecteurs normés u_2, u_3 orthogonaux solutions de l'équation $u_1 \cdot x = 0$. Une base de solution est

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On applique l'algorithme de Gram-Schmidt pour orthonomaliser la famille $\{w_1, w_2\}$. On obtient $u_2 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w_2 - \frac{w_1 \cdot w_2}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d'où en normalisant $u_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On obtient ainsi la matrice $U = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$. Finalement, la décomposition $A = U\Sigma V^T$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Remarque : il y une infinité de solutions possibles pour u_2, u_3.

Méthode 2. On souhaite calculer la décomposition en valeurs singulières de A qui a plus de lignes que de colonnes. Pour éviter de recourir à l'algorithme de Gram-Schmidt pour compléter la matrice U (voir Méthode 1), on peut calculer la décomposition en valeurs singulières de la matrice transposée $B = A^T = \widetilde{U}\widetilde{\Sigma}\widetilde{V}^T$, puis transposer la décomposition obtenue.

On calcule $B^T B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & -8 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de B sont $18, 0, 0$ avec pour vecteurs propres associés $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$, en choisissant v_2, v_3 de sorte que $v_2 \cdot v_3 = 0$. Ainsi, $\widetilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on obtient la matrice $\widetilde{V}$ en normalisant les vecteurs v_1, v_2, v_3 :

$$\widetilde{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Ensuite pour la matrice $\widetilde{U}$, on normalise le vecteur Bv_1 associé à une valeur singulière non nulle. On obtient :

$$u_1 = \frac{1}{\|Bv_1\|} Bv_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On obtient u_2 en prenant un vecteur unitaire orthogonale à u_1 : $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ d'où

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On aboutit à la décomposition en valeur singulière

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

d'où en transposant

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

ii) On calcule : $A^T A = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $A^T A$ sont $25, 9, 0$, avec pour vecteurs propres normalisés associés $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{25} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{9} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (on ordonne les valeurs singulières dans l'ordre décroissant), et on obtient ainsi la matrice orthogonale V :

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La matrice U s'obtient en normalisant les vecteurs Av_i avec v_i associé à une valeur singulière non nulle, ici : $Av_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Av_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$u_1 = \frac{1}{\|Av_1\|} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \frac{1}{\|Av_2\|} Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi la matrice $U = (u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Finalement, la décomposition $A = U\Sigma V^T$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.

ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A, donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1}.

Sol.:

i) On a $A = U\Sigma V^T$ avec U, V des matrices orthogonales de taille $n \times n$ et Σ la matrice diagonale des valeurs singulières. On a $\det(A) = \det(U)\det(\Sigma)\det(V)$, avec $\det(U) \neq 0$ et $\det(V) \neq 0$ (car U et V sont inversibles), ainsi

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(\Sigma) \neq 0$$

et A est inversible si et seulement si ses valeurs singulières sont non nulles.

ii) On a $A = U\Sigma V^T$ avec U, V des matrices orthogonales de taille $n \times n$ et Σ la matrice diagonale des valeurs singulières, inversible d'après la question i). Ainsi, en inversant cette relation (on utilise $U^{-1} = U^T$ et $V^{-1} = V^T$), on obtient la décomposition en valeurs singulières cherchée $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$.

Exercice 7

On suppose que A est une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.

a) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (pas forcément distincts) tels que

$$A = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T. \tag{1}$$

Cette expression est appelée décomposition spectrale de A.

b) Calculer la décomposition spectrale et vérifier l'égalité (1) pour

$$\text{i)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

a) **Méthode 1 :** On applique le théorème spectral à la matrice symétrique réelle A. Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que

$$A = QDQ^T.$$

On note $Q = (\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_n)$ les colonnes de Q, et on pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Comme Q est une matrice orthogonale, $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ est une base orthonormale. De plus,

$$\begin{aligned} A &= QDQ^T = \left(\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_n\right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{pmatrix} \\ &= \left(\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_n\right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \lambda_n \vec{u}_n^T \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T. \end{aligned}$$

Méthode 2 : Soit $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ donnée par le théorème spectral appliqué à A, c-à-d vérifiant $A\vec{u}_k = \lambda_k \vec{u}_k$ pour tout k, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A. Pour montrer que deux matrices sont égales, il suffit de montrer que leurs produits avec tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ coïncident. Comme $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ est une base, tout vecteur $\vec{v}$ se décompose sous la forme $\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{u}_k$. On calcule

$$A\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A \vec{u}_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k \vec{u}_k$$

et

$$\left(\sum_{l=1}^{n} \lambda_l \vec{u}_l \vec{u}_l^T\right) \vec{v} = \left(\sum_{l=1}^{n} \lambda_l \vec{u}_l \vec{u}_l^T\right) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{u}_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \vec{u}_l \vec{u}_l^T \vec{u}_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k \vec{u}_k,$$

où l'on a utilisé $\vec{u}_l^T \vec{u}_k = \vec{u}_l \cdot \vec{u}_k = 0$ pour $l \neq k$ et $\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k = 1$. On obtient ainsi l'égalité des deux matrices A et $\left(\sum_{l=1}^{n} \lambda_l \vec{u}_l \vec{u}_l^T\right)$.

b) i) Il faut en effet calculer les valeurs propres et une base orthonormale de vecteurs propres. On obtient

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1,$$
$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie explicitement l'égalité donnée par la décomposition spectrale :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \lambda_3 \vec{u}_3 \vec{u}_3^T \\
&= -1 \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad +1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.
\end{aligned}$$

ii) On procède comme en i) et on obtient

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 10,$$
$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/(3\sqrt{2}) \\ -1/(3\sqrt{2}) \\ 4/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie également explicitement que

$$\lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \lambda_3 \vec{u}_3 \vec{u}_3^T = A.$$

Exercice 8

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A en base orthonormée.

Note : on ne vous demande pas d'être capable de trouver les racines d'un polynôme général de degré 3 ou plus à l'examen ; ici, pour l'exercice, trouvez les racines par essai-erreur et demandez aux assistant.es si cela vous empêche de progresser.

Sol.: Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Méthode 1 On calcule le polynôme charactéristique $c_A(t) = \cdots = (t-6)(t-2)^3$, et on trouve $\lambda \in \{6, 2\}$. **Méthode 2** On voit que la somme de chaque ligne vaut 6. Ainsi

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient que 2 est une valeur propre en utilisant que la somme des valeurs propres donne la trace de A et le produit des valeurs propres donne le déterminant de A. On obtient que 6 est une valeur propre et 2 est une valeur propre de multiplicité géométrique 3 puisque la matrice $A - 2I_4$ est de rang 1. On en conclut sans faire de calculs que $c_A(t) = (t-6)(t-2)^3$.

On calcule ensuite les espaces propres et on cherche dans chacun d'eux une base orthonormée de vecteurs propres. D'abord

$$E_6 = \text{span} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On utilise alors le procédé de Gram-Schmidt pour que la base de E_2 soir orthonormée :

$$E_2 = \text{span} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right)$$

La matrice de changement de base suivante est donc orthogonale :

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \\ 0 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de P est la transposée P^T et la formule du changement de base donne enfin

$$D = P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Chercher une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) On calcule $A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2$. Les vecteurs propres de $A^T A$ correspondants sont

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a obtenu les colonnes de la matrice V. Pour la matrice U qui est 3×3, il nous faut

$$A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et } A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{A\vec{v}_1, A\vec{v}_2\}$ est une base orthogonale de $\mathrm{Im}(A)$. Mais il nous manque un vecteur orthogonal aux deux autres pour avoir une base OG de $\mathbb{R}^3$. On sait que $\vec{w} \cdot A\vec{v}_1 = 0$ et $\vec{w} \cdot A\vec{v}_2 = 0$

On obtient un système à résoudre (si $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Un vecteur $\vec{w}$ possible est $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ On a une base OG de $\mathbb{R}^3$, que l'on normalise pour trouver les colonnes de U :

$$U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Finalement la matrice Σ est

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) On calcule : $A^T A = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $A^T A$ sont $25, 9, 0$, avec pour vecteurs propres normalisés associés $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{25} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{9} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (on ordonne les valeurs singulières dans l'ordre décroissant), et on obtient ainsi la matrice orthogonale V :

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La matrice U s'obtient en normalisant les vecteurs Av_i avec v_i associé à une valeur singulière non nulle, ici : $Av_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Av_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$u_1 = \frac{1}{\|Av_1\|} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{\|Av_2\|} Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi la matrice $U = (u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Finalement, la décomposition $A = U\Sigma V^T$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Et soit $A = U\Sigma V^T$ une décomposition en valeurs singulières (U est une matrice orthogonale de taille $m \times m$ et V une matrice orthogonale de taille $n \times n$). Montrer que les matrices U et V ne sont pas uniques en général mais que la matrice Σ est unique.

Sol.:

Les $\min(m, n)$ valeurs singulières sont les racines carrées de valeurs propres de la matrice $A^T A$ de taille $n \times n$, elles sont donc uniques. Comme Σ est la matrice diagonale (de taille $m \times n$) des valeurs singulières ordonnées par ordre décroissant, cette matrice est unique.

Les matrices U et V ne sont pas uniques. En effet, on peut toujours multiplier U et V par -1 :

$$A = (-U)\Sigma(-V)^T,$$

ce qui donne une autre décomposition.

Exercice 11

Soit A une matrice symétrique inversible. Montrer qu'alors l'inverse de A est aussi symétrique.

Contrairement au solutionnaire, on vous recommande ici d'utiliser le théorème spectral.

Sol.: Nous avons montré que $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ pour toute matrice inversible A. Supposons maintenant que A est symétrique, i.e. $A = A^T$. Alors

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

Nous avons montré que A^{-1} est symétrique.

Exercice 12

Trouver une décomposition en valeurs singulières des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Sol.:

a) Pour la matrice A. Les valeurs propres de $A^T A$ sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 0$. On obtient $\sigma_1 = 2$ et $\sigma_2 = 0$. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres sont

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite $A\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On cherche une base OG de $\mathbb{R}^2$, on prend $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour compléter le vecteur $A\overrightarrow{v}_1$. On normalise et on obtient

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Pour la matrice B. On a $B^T B = \begin{pmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 90$ et $\lambda_2 = 0$. On calcule les vecteurs propres $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$, et on les normalise. On obtient la matrice V

$$V = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

On a

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule $B\overrightarrow{v}_1$ et $B\overrightarrow{v}_2$

$$B\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ et } B\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a que $\{B\overrightarrow{v}_1\}$ est une base de $\mathrm{Im}(B)$. On doit la compléter avec deux vecteurs orthogonaux. Comme condition on a $\overrightarrow{w} \cdot B\overrightarrow{v}_1 = 0$ ce qui donne $x - 2y - 2z = 0$. On trouve

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux entre eux. On doit faire Gram-Schmidt. On obtient

$$U = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{5} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$$

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, Jerôme Scherer, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.